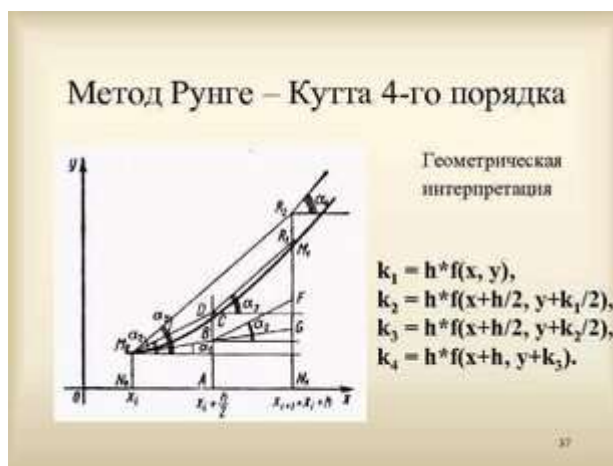


Метод Рунге — Кутта

Методы Рунге — Кутты — это семейство численных методов для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и их систем. Они позволяют находить приближённое решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, продвигаясь вперёд с фиксированным или адаптивным шагом h .



Основная идея

Вместо вычисления высших производных (как в разложении Тейлора) метод оценивает правую часть уравнения $f(x, y)$ в нескольких промежуточных точках внутри шага. Взвешенная комбинация этих оценок даёт приращение функции на шаге.

Классический метод Рунге — Кутты четвёртого порядка (РК4)

Это наиболее распространённый вариант метода. На каждом шаге вычисляются четыре коэффициента:

- $k_1 = h \cdot f(x_n, y_n);$
- $k_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_1/2);$
- $k_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_2/2);$
- $k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3).$

Затем приближённое значение в следующем шаге вычисляется по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Коэффициенты k_1 – k_4 представляют собой оценки наклона решения: k_1 — в начале интервала, k_2 и k_3 — в середине, k_4 — в конце. Весовые множители $1/6, 2/6, 2/6, 1/6$ соответствуют формуле Симпсона.

Локальная погрешность РК4 на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а глобальная погрешность на конечном интервале — $O(h^4)$.

Виды методов Рунге — Кутты

- Явные методы. К ним относится, например, классический метод РК4. Они, как правило, непригодны для решения жёстких систем уравнений из-за малой области их абсолютной устойчивости.

- Неявные методы. Например, модифицированный метод Эйлера «с пересчётом».

- Методы более высоких порядков. При выполнении расчётов с повышенной точностью иногда применяются методы пятого и шестого порядков точности. Построение схем более высокого порядка сопряжено с большими вычислительными трудностями.

- Адаптивные методы. Позволяют контролировать ошибку с помощью адаптивного размера шага. Например, метод Рунге — Кутты — Фельберга сочетает методы порядков 5 и 4.

Применение

Методы Рунге — Кутты широко используются в инженерии для моделирования динамических систем, расчёта переходных процессов в электроприводах, системах автоматического регулирования, робототехнике, в теплотехнике, гидравлике и других областях.

В промышленных расчётных пакетах (ANSYS, COMSOL, OpenFOAM) методы Рунге — Кутты применяются для временного интегрирования нестационарных задач.

Ограничения

Явные методы Рунге — Кутты плохо работают с жёсткими системами ОДУ — уравнениями, содержащими процессы с резко различающимися временными масштабами. Для таких задач применяют неявные методы.

Реализация

Алгоритм РК4 прост в программировании. На каждом шаге выполняется 4 вычисления правой части $f(x, y)$. Для системы из N уравнений потребуется $4N$ вычислений на шаг.

Существуют библиотеки, реализующие методы Рунге — Кутты, например, `rklib` на Fortran, которая включает широкий спектр методов с фиксированным и переменным шагом.